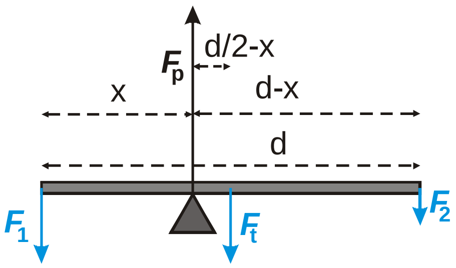
1.7.8 Statika I

Předpoklady: 1707

Pedagogická poznámka: Hodinu rozděluji na dvě části. V první části (25 minut) počítáme první čtyři příklady, ve druhé (20 minut) zbývající tři.

Př. 1: Na koncích tyče o hmotnosti $20\,\text{kg}$ a délce $1\,\text{m}$ jsou zavěšena závaží o hmotnostech $20\,\text{kg}$ a $10\,\text{kg}$. Ve kterém místě je třeba tyč podepřít, aby byla v rovnováze?

$m_t = 20\,\text{kg}$, $d = 1\,\text{m}$, $m_1 = 20\,\text{kg}$, $m_2 = 10\,\text{kg}$, $x = ?$



Tyč je v rovnováze $\Rightarrow$

- výsledná síla je nulová,
- výsledný moment působících sil je nulový (vzhledem k libovolné ose).

Osu otáčení zvolíme v místě podložení, aby byl moment síly od podložky nulový a nemuseli jsme sílu podložky určovat. Bod podložení bude od středu blíže k větší síle F_1.

Momenty:

- $M_1 = F_{g1}x = m_1 g x$ (proti směru HR),
- $M_{F_p} = F_p \cdot 0 = 0$
- $M_t = F_{gt}x = m_t g\left(\frac{d}{2} - x\right)$ (po směru HR),
- $M_2 = F_{g2}x = m_2 g\left(d - x\right)$ (po směru HR).

Výsledný moment je nulový: $M_1 = M_2 + M_t$.

$$m_1 g x = m_2 g(d-x) + m_t g\left(\frac{d}{2} - x\right)$$

$$m_1 x = m_2 d - m_2 x + m_t \frac{d}{2} - m_t x$$

$$m_1 x + m_2 x + m_t x = m_2 d + m_t \frac{d}{2}$$

$$2x\left(m_1 + m_2 + m_t\right) = d\left(2m_2 + m_t\right)$$

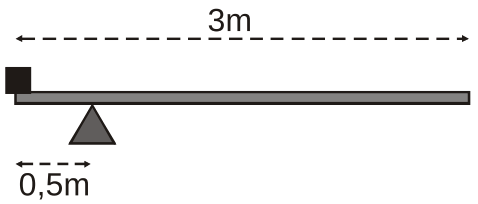
$$x = \frac{(2m_2 + m_t)d}{2(m_1 + m_2 + m_t)} = \frac{\left(2\cdot 10 + 20\right)\cdot 1}{2\left(20 + 10 + 20\right)}\,\text{m} = 0{,}4\,\text{m}$$

Tyč je třeba podepřít ve vzdálenosti $0{,}1\,\text{m}$ od působiště tíhové síly směrem k těžšímu závaží.

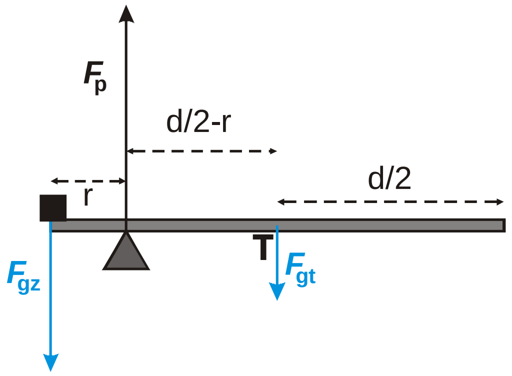
Pedagogická poznámka: Snažím se, aby studenti pochopili, že metoda řešení příkladů je stejná: nakreslíme si situaci, zvolíme nejvhodnější osu otáčení, vyjádříme momenty a dosazením do momentové věty určíme požadovanou veličinu.

Pedagogická poznámka: Možností, jak označit vzdálenosti na páce, je více. Ještě o něco výhodnější než uvedené řešení je volba vzdálenosti *x* jako vzdálenosti místa podložení od těžiště tyče.

Př. 2: Urči hmotnost trámu na obrázku, jestliže je v rovnováze držen závažím o hmotnosti $50\,\text{kg}$ položeným na jeho levém konci. Celková délka trámu je $3\,\text{m}$, podložen je $50\,\text{cm}$ od levého okraje.



$m_z = 50\,\text{kg}$, $r = 50\,\text{cm} = 0{,}5\,\text{m}$, $d = 3\,\text{m}$, $m_t = ?$



Na trám působí tři síly: tíha závaží položeného na levém konci (F_{gz}), tíha trámu působící v jeho těžišti (F_{gt}) a síla podpěry (F_p). Trám je v rovnováze $\Rightarrow$

- součet všech působících sil je nulový,
- součet momentů všech působících sil vzhledem k libovolné ose otáčení je nulový.

Protože nás velikost síly F_p nezajímá, můžeme využít pouze podmínku pro momenty a umístit osu otáčení do místa podložení.

Momenty:

- $M_{F_{gz}} = F_{gz} r = m_z g r$ (proti směru HR),
- $M_{F_p} = F_p \cdot 0 = 0$,
- $M_{F_{gt}} = F_{gt}\left(\frac{d}{2} - r\right) = m_t g\left(\frac{d}{2} - r\right)$ (po směru HR).

$$M_{F_{gz}} = M_{F_{gt}}$$

$$m_z g r = m_t g\left(\frac{d}{2} - r\right)$$

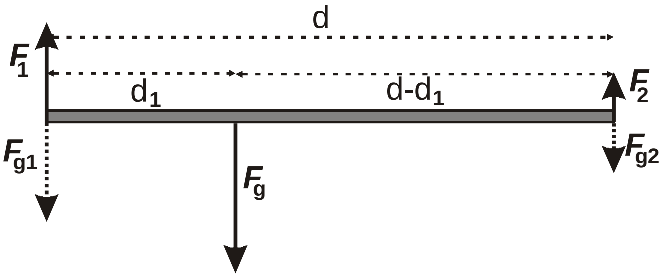
$$m_t = \frac{m_z r}{\left(\frac{d}{2} - r\right)} = \frac{m_z r}{\frac{d - 2r}{2}}$$

$m_t = \frac{2m_z r}{d-2r} = \frac{2\cdot 50\cdot 0{,}5}{3-2\cdot 0{,}5}\,\text{kg} = 25\,\text{kg}$.

Trám má hmotnost $25\,\text{kg}$.

Př. 3: Dva lidé nesou břemeno o hmotnosti $99\,\text{kg}$ zavěšené na vodorovné tyči o délce $150\,\text{cm}$. Tyč mají opřenou o ramena. Závěsný bod O břemene je umístěn ve vzdálenosti $50\,\text{cm}$ napravo od ramene prvního člověka. Jaké síly působí na ramena obou nosičů, je-li hmotnost tyče vůči hmotnosti břemena zanedbatelná?

$m = 99\,\text{kg}$, $d = 1{,}5\,\text{m}$, $d_1 = 0{,}5\,\text{m}$, $F_{g1} = ?$, $F_{g2} = ?$



Síly, které působí na ramena obou nosičů, musí být podle třetího Newtonova zákona stejně velké jako síly, kterými působí ramena na nosnou tyč $\Rightarrow$ určíme síly, kterými působí ramena nosičů na tyč (hledané síly jsou stejně velké).

Tyč je v rovnováze (například ve chvíli, kdy nosiči stojí) $\Rightarrow$

- součet všech působících sil je nulový,
- součet momentů všech působících sil vzhledem k libovolné ose otáčení je nulový.

Určujeme dvě neznámé velikosti sil F_1, F_2 $\Rightarrow$ zvolíme osu otáčení tak, aby moment jedné z těchto sil byl nulový a nemuseli jsme řešit soustavu rovnic.

Osa otáčení v působišti síly F_1 $\Rightarrow$ momenty:

- $M_1 = 0$
- $M_{F_g} = F_g d_1$ (po směru HR),
- $M_2 = F_2 d$ (proti směru HR).

$M_{F_g} = M_2$

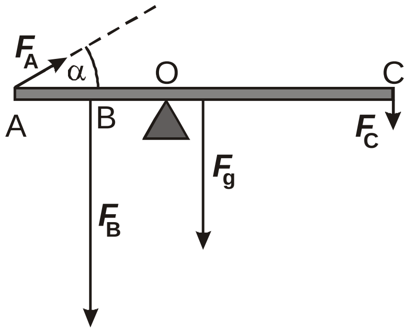
$F_g d_1 = F_2 d \;\Rightarrow\; F_2 = \frac{F_g d_1}{d} = \frac{mgd_1}{d} = \frac{99\cdot 10\cdot 0{,}5}{1{,}5}\,\text{N} = 330\,\text{N}$

$F_1 + F_2 = F_g \;\Rightarrow\; F_1 = mg - F_2 = 99\cdot 10\,\text{N} - 330\,\text{N} = 660\,\text{N}$

Na rameno prvního člověka působí síla $660\,\text{N}$, druhého $330\,\text{N}$.

Př. 4: Na homogenní tyč otáčivou kolem osy v bodě O, působí v bodech *A*, *B* a *C* síly F_A, F_B a F_C. Urči hmotnost tyče, je-li za této situace v rovnováze. Jsou dány tyto hodnoty: $|AC| = 1\,\text{m}$, $|AB| = 0{,}2\,\text{m}$, $|AO| = 0{,}4\,\text{m}$, $F_A = 4\,\text{N}$, $F_B = 15\,\text{N}$, $F_C = 2\,\text{N}$,

$\alpha = 30°$ (úhel, který svírá síla F_A se směrem páky).

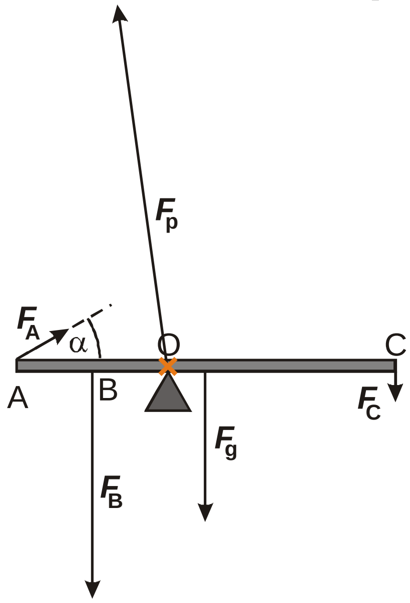


$|AC| = 1\,\mathrm{m}$, $|AB| = 0,2\,\mathrm{m}$, $|AO| = 0,4\,\mathrm{m}$, $F_A = 4\,\mathrm{N}$, $F_B = 15\,\mathrm{N}$, $F_C = 2\,\mathrm{N}$, $\alpha = 30°$, $m_t = ?$

Tyč je v rovnováze $\Rightarrow$

- součet všech působících sil je nulový,
- součet momentů všech působících sil vzhledem k libovolné ose otáčení je nulový.

Protože nás velikost síly F_p nezajímá, můžeme využít pouze podmínku pro momenty a umístit osu otáčení do místa podložení.



Momenty:

- $M_A = F_A |AO| \sin\alpha$ (po směru HR),
- $M_B = F_B |BO|$ (proti směru HR),
- $M_{F_p} = F_p \cdot 0 = 0$,
- $M_C = F_C |OC|$ (po směru HR),
- $M_{F_g} = F_g |OT|$ (po směru HR).

Momentová věta: $M_A + M_{F_g} + M_C = M_B$.

$F_A |AO| \sin\alpha + F_g |OT| + F_C |OC| = F_B |BO|$

Příklad bychom mohli řešit obecně, ale protože rovnice je poměrně složitá, rovnou dosadíme.

$4 \cdot 0,4 \cdot 0,5 + F_g 0,1 + 2 \cdot 0,6 = 15 \cdot 0,2$

$0,8 + 0,1F_g + 1,2 = 3$

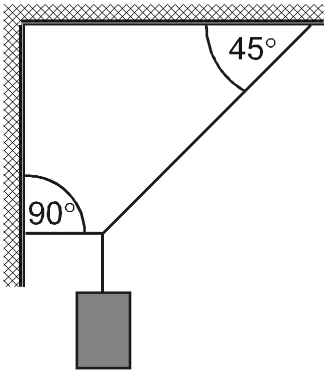
$F_g = 10\,\mathrm{N}$

$F_g = m_t g \Rightarrow m_t = \frac{F_g}{g} = \frac{10}{10}\,\mathrm{kg} = 1\,\mathrm{kg}$

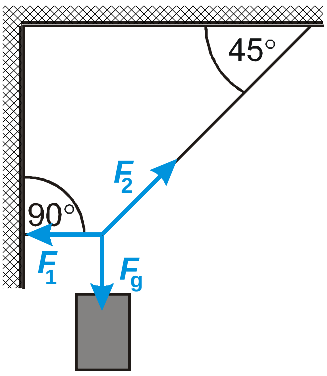
Hmotnost tyče je $1\,\mathrm{kg}$.

Pedagogická poznámka: Pokud si toho někdo ze žáků všimne, můžete si popovídat, proč síla F_p na obrázku nesměřuje kolmo vzhůru.

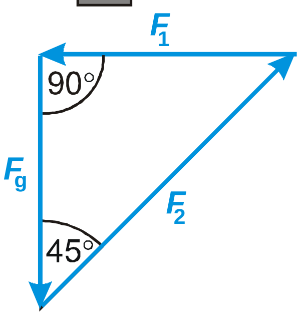
Př. 5: Odlitek o hmotnosti 200 kg je zavěšen u stropu pomocí dvou lan způsobem nakresleným na obrázku. Urči síly, kterými jsou obě lana napínána.



$m = 200\text{ kg}$, $\alpha_1 = 90°$, $\alpha_2 = 45°$, $F_1 = ?$, $F_2 = ?$



Odlitek je při zavěšení v klidu $\Rightarrow$ výslednice působících sil je nulová.
Stejná podmínka platí pro místo, kde jsou svázaná lana: výslednice sil F_g, F_1 a F_2 musí být nulová $\Rightarrow$ vektory sil můžeme zakreslit tak, aby tvořily trojúhelník.



Trojúhelník tvořený silami je pravoúhlý s jedním úhlem o velikosti 45°. Známe velikost síly F_g, musí platit:

$$\cos 45° = \frac{F_g}{F_2} \Rightarrow F_2 = \frac{F_g}{\cos 45°}$$

$$\mathrm{tg}\,45° = \frac{F_1}{F_g} \Rightarrow F_1 = F_g \cdot \mathrm{tg}\,45°$$

$$F_2 = \frac{F_g}{\cos 45°} = \frac{mg}{\cos 45°} = \frac{200 \cdot 10}{\cos 45°}\,\mathrm{N} \doteq 2800\,\mathrm{N}$$

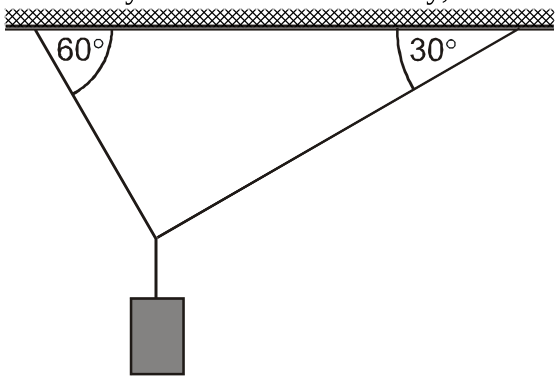
$$F_1 = F_g \cdot \mathrm{tg}\,45° = mg\,\mathrm{tg}\,45° = 200 \cdot 10 \cdot \mathrm{tg}\,45°\,\mathrm{N} = 2000\,\mathrm{N}$$

Lana jsou napínána silami 2000 N a 2800 N.

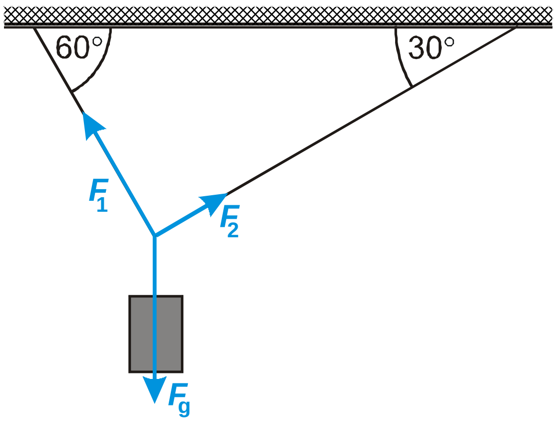
Pedagogická poznámka: Stejně jako u rovnováhy na pákách v počátku hodiny i nyní počítáme tři příklady velmi podobným způsobem: nakreslíme si situaci, určíme si působící síly, zakreslíme je do trojúhelníku a pomocí goniometrických funkcí (nebo podobnosti trojúhelníků) určíme jejich velikosti.

Pedagogická poznámka: Pokud má někdo problém se směrem síly F_1, vyzvěte ho, aby si představil, co by nastalo, kdyby síla přestala působit (dotyčné lano by se přetrhlo).

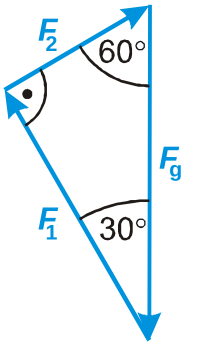
Př. 6: Odlitek o hmotnosti 200 kg je zavěšen u stropu pomocí dvou lan způsobem nakresleným na obrázku. Urči síly, které napínají lana.



$m = 200\ \text{kg}$, $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 30°$, $F_1 = ?$, $F_2 = ?$



Odlitek je při zavěšení v klidu $\Rightarrow$ výslednice působících sil je nulová.
Stejná podmínka platí pro místo, kde jsou svázaná lana: výslednice sil F_g, F_1 a F_2 musí být nulová $\Rightarrow$ vektory sil můžeme zakreslit tak, aby tvořily trojúhelník.



Trojúhelník tvořený silami je pravoúhlý s dalšími úhly o velikostech $30°$ a $60°$. Známe velikost síly F_g, musí platit (například):

$F_1 = F_g \cos 30°$

$F_2 = F_g \sin 30°$

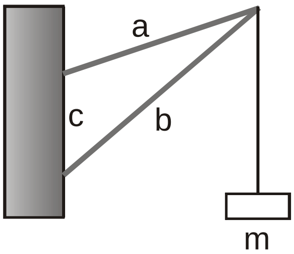
$F_1 = F_g \cos 30° = mg \cos 30° = 200 \cdot 10 \cdot \cos 30°\ \text{N} \doteq 1730\ \text{N}$

$F_2 = F_g \cos 60° = mg \cos 60° = 200 \cdot 10 \cdot \cos 60°\ \text{N} = 1000\ \text{N}$

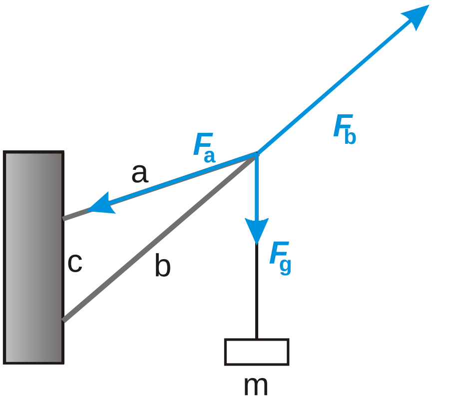
Lana jsou napínána silami 1730 N a 1000 N.

Pedagogická poznámka: Část žáků kreslí špatně síly F_1 a F_2 (druhou sílu si představují jako větší). Buď s nimi můžete porovnat velikosti vodorovných složek obou sil (musí být stejné, aby vodorovná složka výslednice byla nulová, nebo je nechte rozložit do vyznačených směrů sílu opačnou k síle F_g.

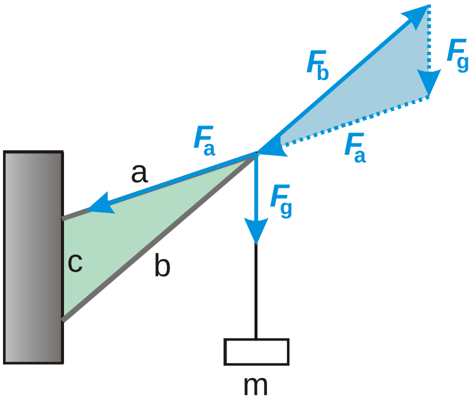
Př. 7: Závaží o hmotnosti $m = 100\ \text{kg}$ je zavěšeno na nosníku skládajícího se ze dvou ramen o délkách $a = 0{,}8\,\text{m}$ a $b = 1\,\text{m}$. Vzdálenost mezi body, ve kterých jsou ramena upevněna do zdi, je $c = 0,4\,\text{m}$. Urči síly, které působí na obě ramena nosníku.



$m = 100\,\text{kg}$, $a = 0,8\,\text{m}$, $b = 1\,\text{m}$, $c = 0,4\,\text{m}$, $F_a = ?$, $F_b = ?$



Závaží je při zavěšení v klidu $\Rightarrow$ výslednice působících sil je nulová.
Stejná podmínka platí pro místo, kde je závaží připevněno k nosníku: výslednice sil F_g, F_a a F_b musí být nulová $\Rightarrow$ vektory sil můžeme zakreslit tak, aby tvořily trojúhelník.
Síla F_a působí na bod zavěšení šikmo dolů ke zdi (bez nosníku *a* by se bod zavěšení vzdaloval od zdi).
Síla F_b působí na bod zavěšení šikmo vzhůru (bez nosníku *b* by bod zavěšení padal dolů).
Trojúhelník tvořený silami je podobný trojúhelníku, který tvoří nosníky a zeď (se stranami *a*, *b*, *c*):



Z rovnosti poměrů odpovídajících si stran plyne:
$\frac{F_a}{F_g} = \frac{a}{c} \Rightarrow F_a = \frac{a}{c} F_g = \frac{a}{c} mg$.
Z rovnosti poměrů odpovídajících si stran plyne:
$\frac{F_b}{F_g} = \frac{b}{c} \Rightarrow F_b = \frac{b}{c} F_g = \frac{b}{c} mg$

$$F_a = \frac{a}{c} mg = \frac{0,8}{0,4} \cdot 100 \cdot 10\,\text{N} = 2000\,\text{N}$$

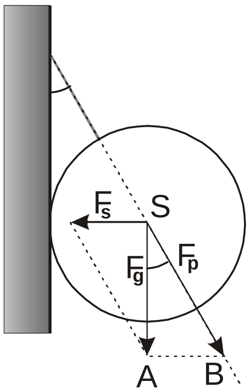
$$F_b = \frac{b}{c} mg = \frac{1}{0,4} \cdot 100 \cdot 10\,\text{N} = 2500\,\text{N}$$

Na ramena nosníku působí síly $F_a = 2000\,\text{N}$ a $F_b = 2500\,\text{N}$.

Př. 8: Koule o hmotnosti $2\,\text{kg}$ je zavěšena na provázku připevněném ke svislé stěně tak, že vlákno svírá se stěnou úhel $30°$. Urči síly, kterými koule působí na stěnu i vlákno.

$m = 2\,\text{kg}$, $\alpha = 30°$, $F_p = ?$, $F_s = ?$

Tíhová síla, která působí na kouli, se rozloží na dvě složky. Složka F_p má stejný směr jako provázek, na kterém je zavěšena koule. Složka F_p je tedy silou, kterou působí koule na provázek. Složka F_s má směr kolmý ke stěně a je tedy silou, kterou působí koule na stěnu. Síla F_g se rozkládá právě do těchto dvou směrů, protože na kouli mohou působit vnější síly pouze v těchto směrech. Tahová síla provázku, která vyrovná složku F_p, a tlaková síla stěny, která vyrovná sílu F_s. Koule tak zůstane v klidu.



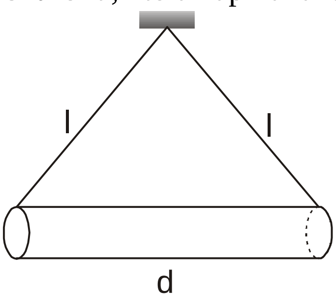
Velikosti sil F_p a F_s určíme z trojúhelníku ΔSAB

$$\cos\alpha = \frac{F_g}{F_p} \Rightarrow F_p = \frac{F_g}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{2\cdot 10}{\cos 30°}\,\mathrm{N} = 23{,}1\,\mathrm{N}$$

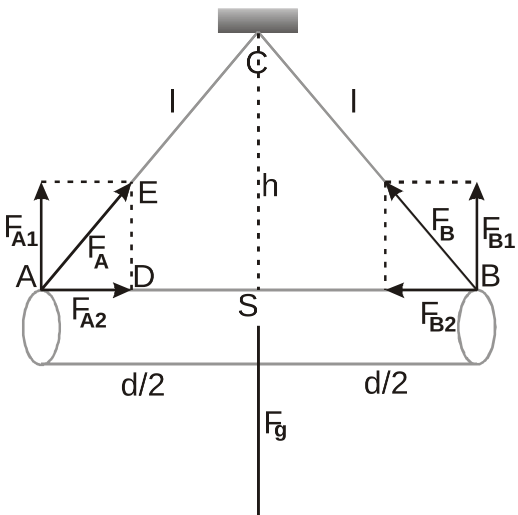
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_s}{F_g} \Rightarrow F_s = F_g \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = mg\cdot \mathrm{tg}\,\alpha = 2\cdot 10\cdot \mathrm{tg}\,30°\,\mathrm{N} = 11{,}5\,\mathrm{N}$$

Koule působí na provázek silou $23{,}1\,\mathrm{N}$ a na stěnu působí silou $11{,}5\,\mathrm{N}$.

Př. 9: Parovodní trubka o hmotnosti $m = 1{,}5\,\mathrm{t}$ a délce $d = 4\,\mathrm{m}$ je na koncích zavěšena na dvou ocelových lanech o délce $l = 3\,\mathrm{m}$ připevněných na druhém konci na hák jeřábu. Urči sílu, která napíná lana.



$d = 4\,\mathrm{m}$ $\quad l = 3\,\mathrm{m}$ $\quad m = 1{,}5\,\mathrm{t} = 1500\,\mathrm{kg}$ $\quad F = ?$



Na troubu působí tři síly: tahové síly obou lan (F_A a F_B) a tíhová síla země. Aby byla trouba v klidu, musí být výslednice všech působících sil nulová. Obě tahové síly můžeme rozložit do dvou na sebe kolmých směrů – na vodorovné složky (F_{A2}, F_{B2}) a svislé složky (F_{A1}, F_{B1}) a těmito složkami je nahradit. Takto získáme pět sil, které působí na troubu (F_g , dvě síly o velikosti F_1 a dvě síly o velikosti F_2) a jsou vzájemně kolmé nebo rovnoběžné.

Všechny síly působící ve vodorovném směru musejí mít nulovou výslednici. Ve vodorovném směru působí síly F_{A2}, F_{B2}, mají opačný směr, jejich velikosti tedy musejí být stejné. Platí $F_{A2} = F_{B2}$. Síla F_{A2} je vodorovnou složkou síly F_A, síla F_{B2} je vodorovnou složkou síly F_B. Síly F_A a F_B svírají s vodorovným směrem stejný úhel, mají-li stejnou vodorovnou složku, a svírají-li stejný úhel, musí mít i stejnou velikost a stejné svislé složky F_{A1}, F_{B1}, pro které platí $F_{A1} = F_{B1}$.

Ve svislém směru působí tři síly F_{A1}, F_{B1} (nahoru) a F_g (dolů). Platí tedy:

$F_{A1} + F_{B1} = F_g$ dosadím $F_{A1} = F_{B1}$

$$F_{A1} + F_{A1} = F_g$$

$$2F_{A1} = F_g \Rightarrow F_{A1} = \frac{F_g}{2}$$

Známe tedy vodorovnou složku síly F_A. Velikost síly F_A určíme z podobnosti trojúhelníků $\Delta ADE \sim \Delta ASC$:

$$\frac{F_A}{F_{A1}} = \frac{l}{h}$$

$$F_A = \frac{l}{h} F_{A1} = \frac{l}{2h} F_g$$

Vzdálenost h určíme pomocí Pythagorovy věty: $h^2 = l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}$

Dosadíme za h: $F_A = \frac{l}{2h} F_g = \frac{l}{2\sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2}} mg = \frac{3}{2\sqrt{3^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2}} \cdot 1500 \cdot 10\,\mathrm{N} = 10000\ \mathrm{N}$

Ocelová lana jsou napínána silami $10000\,\mathrm{N}$.

Shrnutí: Při výpočtu rovnováhy sil je výhodné zakreslit působící síly do trojúhelníku.